Ирационалност

Задатак 1. *Нека су* a, b *и* c *природни бројеви такви да бројеви* ab, ac *и* bc *нису сви потпуни квадрати. Доказати да је број* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ *ирационалан.*

Решење. Претпоставимо да је број $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ рационалан. Тада је и број $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$, тј. $a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$ рационалан, па је и број $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$ рационалан. Следи да је и број $(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})^2$, тј. $ab+ac+bc+2(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab})$ рационалан, па је и број $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$ рационалан. Из ове и претходне констатације добијамо да је и број $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}-a(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$, тј. $(b-a)\sqrt{ac}+(c-a)\sqrt{ab}$ рационалан, па је и број $((b-a)\sqrt{ac}+(c-a)\sqrt{ab})^2$, тј. $(b-a)^2ac+(c-a)^2ab+2(b-a)(c-a)a\sqrt{bc}$ рационалан. Одатле следи да је број $\sqrt{bc}$ рационалан, тј. да је bc потпун квадрат. На аналоган начин добијамо да су и бројеви ab и ac потпуни квадрати, контрадикција. $\square$

Задатак 2. *Да ли је вредност израза*

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

рационалан број?

Решење. Приметимо одмах да је посматрани број реалан. Обележимо

$$x=\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}},\quad y=\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\quad \text{и}\quad A=x+y.$$

Тада имамо

$$xy=\sqrt[3]{36-\frac{121}{9}\cdot\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{\frac{972-847}{27}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{5}{3}$$

и

$$x^3+y^3=12.$$

Из идентитета

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

добијамо $A^3=12+5A$, тј.

$$A^3-5A-12=0.$$

Леву страну можемо раставити на чиниоце, чиме добијамо $(A-3)(A^2+3A+4)=0$. Једна могућност је $A=3$. Како једначина $A^2+3A+4=0$ има негативну дискриминанту ($3^2-4\cdot4=-7<0$), она нема реалних решења, а пошто знамо да је A реалан број, заправо је једина могућност $A=3$. Дакле, A је рационалан број. $\square$

Задатак 3. *Показати да у децималном запису броја* $\sqrt[3]{3}$ *постоји цифра различита од* 2 *између цифара на позицијама* $1\,000\,000$ *и* $3\,141\,592$ *иза децималног зареза.*

Решење. Претпоставимо супротно, да су све цифре у децималном запису броја $\sqrt[3]{3}$ између цифара на позицијама $1\,000\,000$ и $3\,141\,592$ иза децималног зареза једнаке 2. Означимо $s = \lfloor 10^{1\,000\,000}\sqrt[3]{3}\rfloor$. Из претпоставке следи $|\sqrt[3]{3} - (s+\frac{2}{9})10^{-1\,000\,000}| < 10^{-3\,141\,591}$, што се своди на

$$\left|\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} - (9s+2)\right| < 9\cdot 10^{-2\,141\,591} < 10^{-2\,141\,590}. \qquad (1)$$

С друге стране, важи следећа процена:

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} - (9s+2)\right|\\ &= \frac{|3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3 - (9s+2)^3|}{\left(\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3}\right)^2 + \sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3}(9s+2) + (9s+2)^2} \qquad (2)\\ &> \frac{1}{3\cdot(10^{1\,000\,002})^2} > 10^{-2\,000\,005}.\end{aligned}$$

Објаснимо, у горњем рачуну неједнакост за бројилац имамо на основу чињенице да су умањеник и умањилац очито различити, будући да је један дељив са 3 а други није; неједнакост за именилац имамо на основу неједнакости

$$\sqrt[3]{3\cdot(9\cdot 10^{1\,000\,000})^3} = \sqrt[3]{3}\cdot 9\cdot 10^{1\,000\,000} < 10^{1\,000\,002}$$

и

$$9s+2 < 10s < 10\cdot 10^{1\,000\,000}\sqrt[3]{3} < 10^{1\,000\,002}.$$

Из (1) и (2) добијамо контрадикцију. □

Задатак 4. *Доказати да је, за све* $n \geqslant 3$, *могуће одабрати* n *тачака у равни таквих да је растојање између сваког пара тих тачака ирационалан број а да су сваке три тачке темена (недегенерисаног) троугла рационалне површине.*

Решење. Најпре одаберимо n тачака у општем положају чије су обе координате целобројне. Сви троуглови које оне образују имају рационалну површину (ово се може установити нпр. примећујући да се површина сваког таквог троугла може изразити као разлика одређеног правоугаоника с целобројним страницама и одређених правоуглих троуглова с целобројним катетама, или још лакше, као специјалан случај Пикове теореме), док су сва растојања између њих облика $\sqrt{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$. Одаберимо сада прост број p такав да ниједно n_i није дељиво са p, и скалирајмо раван за фактор $\sqrt{p}$. Површина свих посматраних троуглова на тај начин множи се са $(\sqrt{p})^2$, тј. са p, па остаје рационална. Сва посматрана растојања постају облика $\sqrt{n_i p}$, па како $p \nmid n_i$, дакле $n_i p$ не може бити потпун квадрат. Овим је доказ завршен. □